

Co by było, gdyby...?

Czyli o prawdopodobieństwie warunkowym, Bayesie, i agentach.

Kacper Kulczycki
Warszawa 2007

Plan działań

- Co to właściwie jest prawdopodobieństwo warunkowe?
- Co ciekawego stwierdził Bayes?
- Jeden „chory” przykład
- Kto jest agentem (probabilistycznym)?
- Co nam powie agent?
- Co z tego wszystkiego wynika?

Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(A \wedge B) \neq P(A | B) \quad !!!$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(B) \neq 0 \\ P(A | A) = 1 \\ A \text{ i } B \text{ niezależne} \equiv \\ \equiv P(A \wedge B) = P(A)P(B) \equiv \\ \equiv P(A | B) = P(A) \end{array} \right.$$

Twierdzenie Bayesa

$$\left. \begin{aligned} P(A | B) &= \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \wedge B) = P(A | B)P(B) \\ P(B | A) &= \frac{P(B \wedge A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \wedge A) = P(B | A)P(A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B | A) = \frac{P(A | B)P(B)}{P(A)}$$

Twierdzenie Bayesa – tips and tricks

Trick 1 – Twierdzenie o zupełnym układzie zdarzeń

$$\left. \begin{array}{l} \forall_{i, j \in \overline{1, n} \wedge i \neq j} B_i \cap B_j = \emptyset \\ \forall_{i \in \overline{1, n}} P(B_i) > 0 \\ \coprod_{i \in \overline{1, n}} B_i = \Omega \text{ zbiór zdarzeń} \end{array} \right\} \equiv \text{zupełny układ zdarzeń} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall_{A \in \Omega} P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)$$

Twierdzenie Bayesa – tips and tricks

Trick 2 – Twierdzenie Bayesa (extended ver.)

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i) \\ P(B | A) &= \frac{P(A | B) P(B)}{P(A)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(B_k | A) = \frac{P(A | B_k) P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)}$$

prawdopodobieństwo a priori

„Chory” przykład

Przykład 11 ze „Wstępu do współczesnej statystyki”

- Populacja 60 000 000 ludzi,
- w tym 100 000 nosicieli HIV
- test obecności HIV wykrywa 100% zakażeń,
- ale myli się w 0,2% zdrowych przypadków
- Jakie jest prawdopodobieństwo że losowo wybrany człowiek, jest nosicielem HIV, jeśli test w jego przypadku wypadł pozytywnie?

„Chory” przykład

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) P(B)}{P(A)}$$

$$P(\text{HIV} | \text{wynik} +) = \frac{P(\text{wynik} + | \text{HIV}) P(\text{HIV})}{P(\text{wynik} +)}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)$$

$$\begin{aligned} P(\text{wynik} +) &= P(\text{wynik} + | \text{HIV}) P(\text{HIV}) + \\ &+ P(\text{wynik} + | \neg \text{HIV}) P(\neg \text{HIV}) = P(\text{wynik} + | \text{HIV}) P(\text{HIV}) + \\ &+ P(\text{wynik} + | \neg \text{HIV}) (1 - P(\text{HIV})) \end{aligned}$$

„Chory” przykład

$$P(\text{HIV} \mid \text{wynik} +) = \frac{P(\text{wynik} + \mid \text{HIV})P(\text{HIV})}{P(\text{wynik} + \mid \text{HIV})P(\text{HIV}) + P(\text{wynik} + \mid \neg\text{HIV})(1 - P(\text{HIV}))}$$

$$P(\text{HIV} \mid \text{wynik} +) = \frac{1 * \frac{1}{600}}{1 * \frac{1}{600} + 0,002 * \left(1 - \frac{1}{600}\right)} = \frac{1}{1 + 0,002 * 599} = \frac{1}{2,198} = 0,455 = 45,5\%$$

0(0)7 zgłoś się

Agent inteligentny (a właściwie racjonalny) to podstawowy obiekt sztucznej inteligencji – czyli taki który postrzega i działa.

Formalna definicja jest następująca:

Agent to funkcja f odwzorowująca obserwacje P , na działania A . $f: P \rightarrow A$

Określa się wiele cech charakteryzujących agentów, ale w tej chwili, nie ma miejsca na ich dokładne omówienie, nas będzie teraz interesował agent probabilistyczny

0(0)7 zgłoś się

Agent probabilistyczny to taki który działa w oparciu o niepełną wiedzę o otoczeniu, a prawdopodobieństwo oznacza „zaufanie” do informacji dostarczanych mu przez środowisko

0(0)7 zgłoś się

np. świat trzech zmiennych *ból zęba, ubytek, wykrycie ubytku*

	Ból zęba		Brak bólu zęba	
	Wykrycie	Brak wykrycia	Wykrycie	Brak wykrycia
Ubytek	0.108	0.012	0.072	0.008
Brak ubytku	0.016	0.064	0.144	0.576

Albo filtr spamu Paula Grahama <http://www.paulgraham.com>
opiera się on na regule Bayesa

0(0)7 zgłoś się

Filtr spamu Paula Grahama <http://www.paulgraham.com>

$$P(\text{spam} \mid \text{słowa}) = \frac{P(\text{słowa} \mid \text{spam}) P(\text{spam})}{P(\text{słowa})}$$

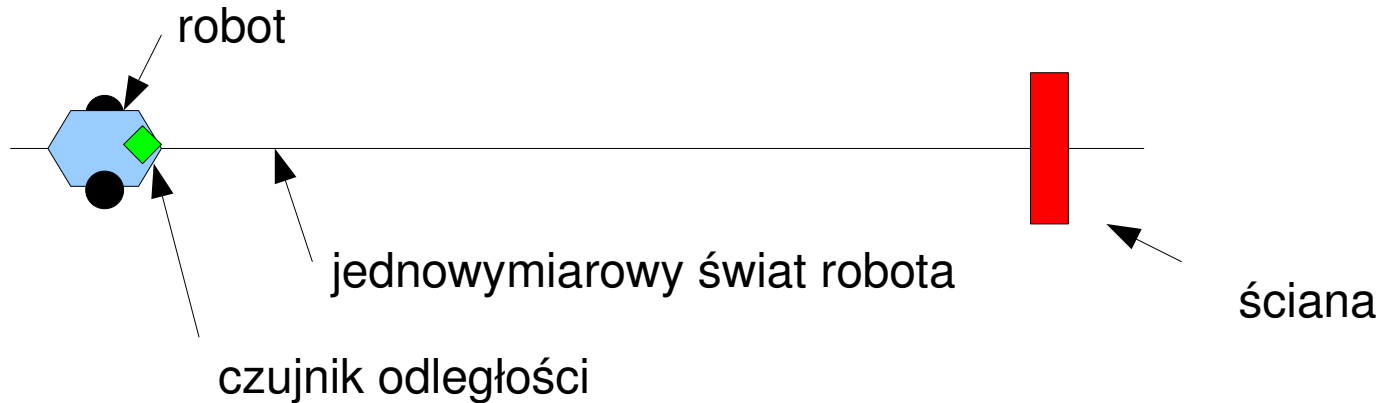
$$= \frac{P(\text{spam} \mid \text{słowa}) P(\text{spam})}{P(\text{słowa} \mid \text{spam}) P(\text{spam}) + P(\text{słowa} \mid \neg \text{spam}) P(\neg \text{spam})}$$

$$P(\text{słowa} \mid \text{spam}) = \prod_{i=1, n} P(\text{słowo}_i \mid \text{spam})$$

$$\begin{aligned} P(\text{spam} \mid \text{słowa}) &= \frac{P(\text{spam}) \prod_{i=1, n} P(\text{słowo}_i \mid \text{spam})}{P(\text{słowa})} = \\ &= \frac{P(\text{spam}) \prod_{i=1, n} P(\text{słowo}_i \mid \text{spam})}{P(\text{spam}) \prod_{i=1, n} P(\text{słowo}_i \mid \text{spam}) + P(\neg \text{spam}) \prod_{i=1, n} (1 - P(\text{słowo}_i \mid \text{spam}))} = \\ &= \frac{\prod_{i=1, n} P(\text{słowo}_i \mid \text{spam})}{\prod_{i=1, n} P(\text{słowo}_i \mid \text{spam}) + \prod_{i=1, n} (1 - P(\text{słowo}_i \mid \text{spam}))} \end{aligned}$$

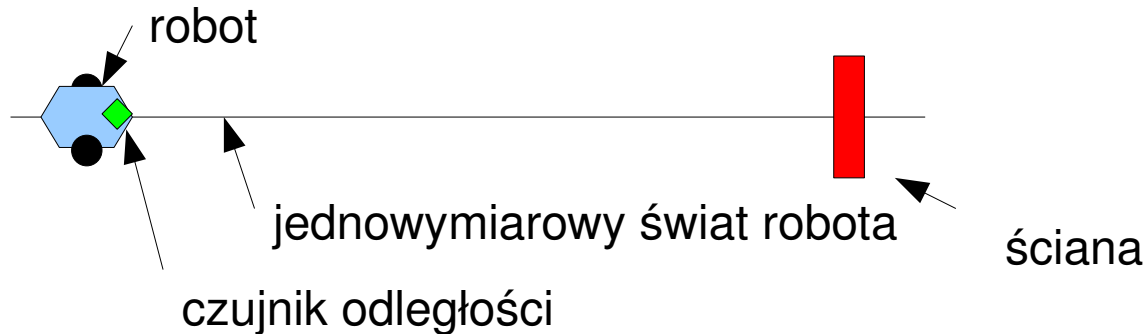
Co tygrys(y) lubi(a) najbardziej

Czyli sterowanie robotem



Typowy problem sterowania i orientowania w przestrzeni robota. Znamy „profil czujnika”, znamy „pozycje odometryczną”, oraz trajektorię robota. Pytamy gdzie on się znajduje.

Co tygrys(y) lubi(a) najbardziej



$$P(\text{pozycja} \mid \text{wskazanie czujnika}) = \frac{P(\text{wskazanie czujnika} \mid \text{pozycja})P(\text{pozycja})}{P(\text{wskazanie czujnika})}$$

$$P(\text{wskazanie czujnika}) = \sum_{i=1}^n P(\text{wskazanie czujnika} \mid \text{pozycja}_i) P(\text{pozycja}_i)$$

„profil czujnika” - $P(\text{wskazanie czujnika} \mid \text{pozycja})$,

„pozycja odometryczną” - $P(\text{pozycja})$,

trajektoria – $P(\text{pozycja}_i)$ robota.

Podsumowanie

- Wprowadzenie pojęcia (nie)zależności zdarzeń => „zmniejszenie skomplikowania opisu”
- Twierdzenie Bayesa => trick na „odwracanie kota ogonem”
- Rachunek prawdopodobieństwa jest podstawą powszechnie stosowanych agentów inteligentnych (racjonalnych)

Źródła

- „Wstęp do współczesnej statystyki” P. J. Durka
- „Artificial Intelligence” S. Russell P. Norvig
- „Wprowadzenie do sztucznej inteligencji” - wykład dr inż F. Dula (strona wykładu: <http://strony.aster.pl/fdul>)