

Kacper Kulczycki

Zadanie 20a

Badanie drgań struny

Warszawa 2002

Wstęp

Celem doświadczenia było wyznaczenie:

- kolejnych częstotliwości drgań własnych metalowej struny,
- krzywej rezonansowej dla konkretnej harmonicznej drgań tej struny,
- zależności częstotliwości od naprężenia struny,
- zależności częstotliwości od długości tej struny.

Teoria

ad. a.

$$v = \frac{k+1}{2l} \sqrt{\frac{mg}{\rho}} \quad \text{wz.1.}$$

ad. b.

$$\lambda = \frac{2l}{k+1} \quad \text{wz.2.}$$

A ze wzoru 1.:

$$\lambda = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{mg}{\rho}} \quad \text{wz.3.}$$

Co po zlogarytmowaniu obu stron daje liniową zależność:

$$\log(\lambda) = -\log(v) + \log\left(\sqrt{\frac{mg}{\rho}}\right) \quad \text{wz.4.}$$

ad. c.

Po zlogarytmowaniu obu stron równania wz.1.- liniowa zależność:

$$\log(v) = \frac{1}{2} \log(m) + \log\left(\frac{1}{2l} \sqrt{\frac{g}{\rho}}\right) \quad \text{wz.5.}$$

ad. d.

Po zlogarytmowaniu obu stron równania wz.1.- liniowa zależność:

$$\log(v) = -\log(l) + \log\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{\rho}}\right) \quad \text{wz.6.}$$

gdzie:

ν - częstość $(k + 1)$ -ej harmonicznej drgań struny,

k - liczba numerująca kolejne harmoniczne $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,

l - długość struny,

m - masa napinająca strunę,

g - przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$,

ρ - gęstość liniowa struny,

λ - długość drgań $(k + 1)$ -ej harmonicznej, a tym samym ich amplituda.

Przebieg doświadczenia

Układ pomiarowy składał się z szyny z zamocowaną struną, generatora, wzmacniacza i oscyloskopu. Szyna wyposażona była w dwa koniki, na których umieszczone były elektromagnesy oraz jeden dodatkowy konik służący do regulacji długości struny (długości jej drgającej części). Jeden koniec struny został przymocowany na stałe do szyny, na drugim zaś, przewieszonym przez krążek końca zawieszona została szalka wagi. Umożliwiło mi to regulację naciągu struny (poprzez umieszczanie na szalce odważników o odpowiadającej jej masie). Jeden z elektromagnesów podłączony został do generatora, drugi zaś, poprzez wzmacniacz, do oscyloskopu. Działanie układu było następujące. Generator pobudzał (poprzez elektromagnes) strunę do drgań o określonej częstotliwości. Drgania te były przeze mnie rejestrowane na oscyloskopie. Badając amplitudę tych drgań mogłem określić, dla jakich częstotliwości zachodzi rezonans.

W pierwszej części doświadczenia badałem drgania struny o maksymalnej długości przy obciążeniu 5,756 kg. Zgodnie ze wzorem 1. kolejne harmoniczne powinny być wielokrotnościami pierwszej.

Część druga - badanie kształtu krzywej rezonansowej dla pierwszej harmonicznej.

Ta część doświadczenia miała na celu stwierdzenie na ile dokładnie można ocenić częstość drgań własnych struny. Jeśli krzywa rezonansowa jest wystarczająco wąska, to dokładność ogranicza głównie niepewność pomiaru częstości, w przeciwnym wypadku sama natura zjawiska nie pozwala nam na zbyt dokładne pomiary. W tym drugim przypadku należałoby zmienić metodę mierzenia częstości drgań własnych struny (na przykład można by badać krzywe rezonansowe dla każdego drgania harmonicznego i na podstawie ich maksimum odczytywać częstości własne struny).

Kolejna część - sprawdzanie zależności częstości podstawowej struny od jej długości.

Sprowadzając wz.1. do wz.5. problem staje się liniowy (na wykresie obie skale logarytmiczne dadzą liniowy wykres).

W ostatniej części doświadczenia długość struny była maksymalna, zaś jej obciążenie zmieniało się. Również tym razem, sprowadzając wz.1 do wz.6., problem będzie liniowy

Wyniki i wnioski

$$\underline{l = 0,805 \pm 0,001 \text{ m}}$$

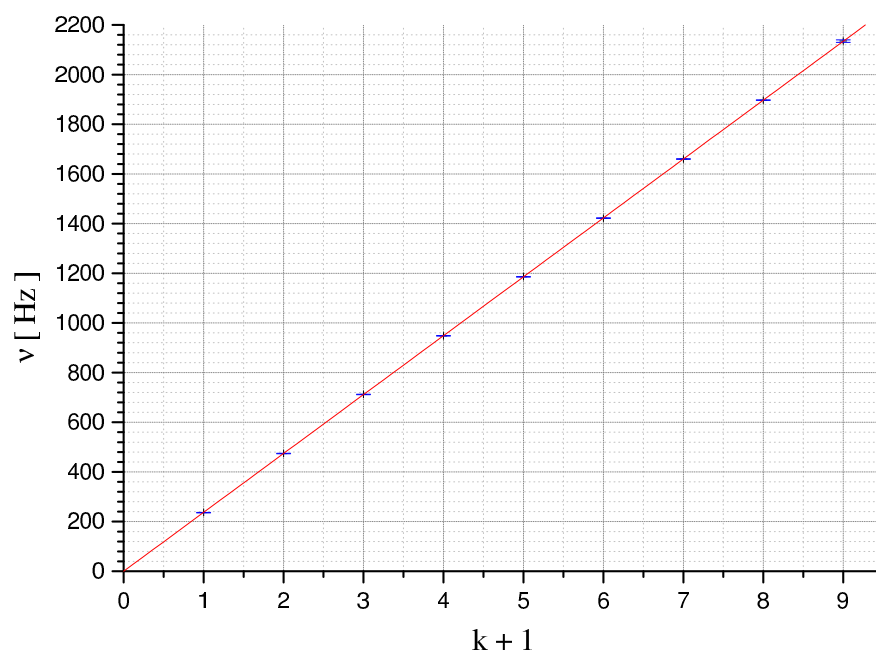
ad. a.

k + 1	v [Hz]	Δv [Hz]
1	236	1
2	474	1
3	712	1
4	948	1
5	1186	1
6	1422	1
7	1660	1
8	1897	1
9	2135	5

W wyniku aproksymacji prostej dostałem:

$$\frac{1}{2l} \sqrt{\frac{mg}{\rho}} = \underline{\underline{237,140 \pm 0,039 \text{ Hz}}}, \text{ a to jest częstość podstawowa struny}$$

przy $\chi^2 = 0,423$



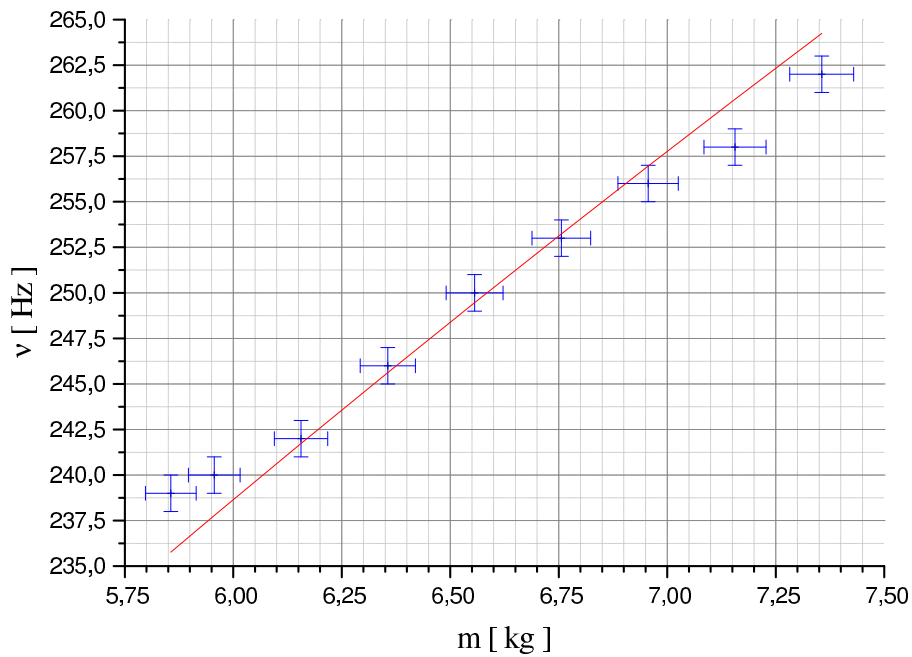
ad. d.

m [kg]	Δm [kg]	v [Hz]	Δv [Hz]
5,856	0,059	239	1
5,956	0,060	240	1
6,156	0,062	242	1
6,356	0,064	246	1
6,556	0,066	250	1
6,756	0,068	253	1
6,956	0,070	256	1
7,156	0,072	258	1
7,356	0,074	262	1

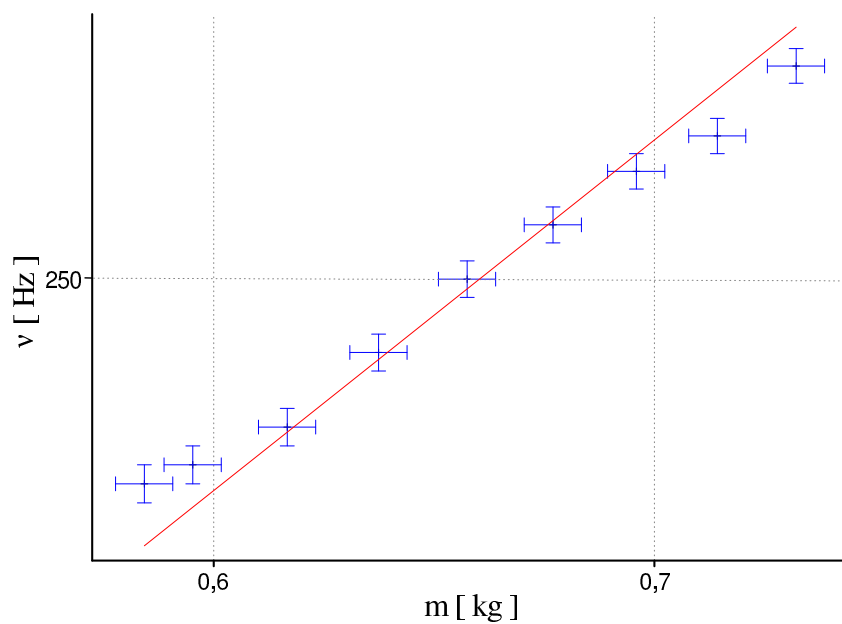
W wyniku aproksymacji krzywej dostałem :

$$\frac{1}{21} \sqrt{\frac{g}{\rho}} = 9492 \pm 48 \text{ Hz/kg}$$

przy $\chi^2 = 3,603$



a tak wygląda to w skalach logarytmicznych (dziesiętnych):



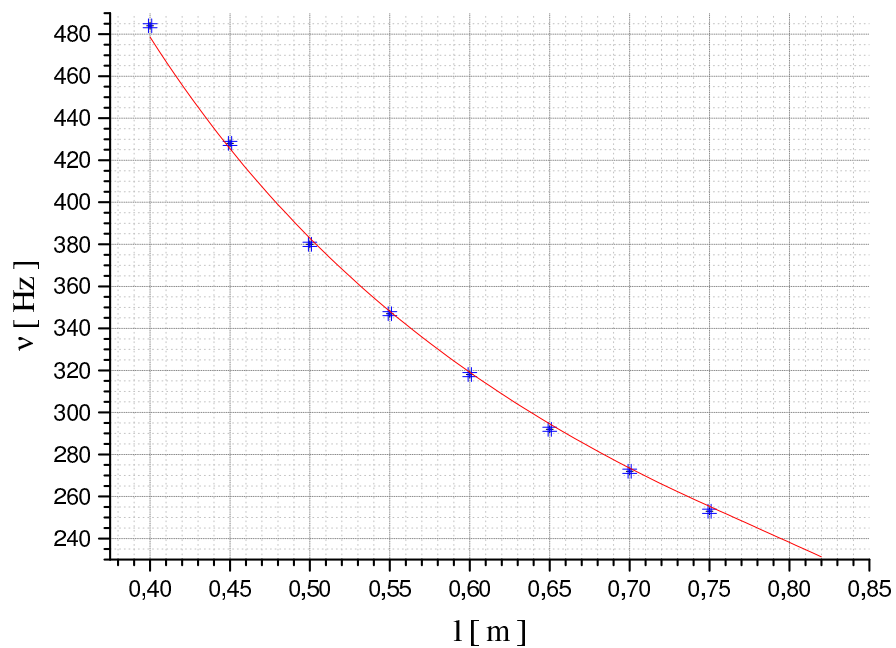
ad. c.

l [m]	Δl [m]	v [Hz]	Δv [Hz]
0,750	0,001	253	1
0,700	0,001	272	1
0,650	0,001	292	1
0,600	0,001	318	1
0,550	0,001	347	1
0,500	0,001	380	1
0,450	0,001	428	1
0,400	0,001	484	1

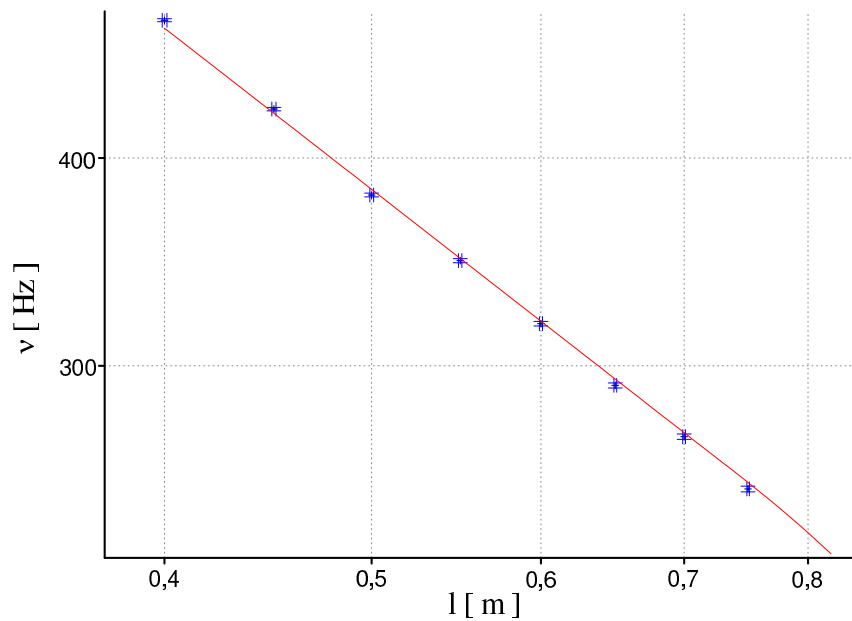
W wyniku aproksymacji krzywej dostałem :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{\rho}} = \underline{\underline{191,47 \pm 0,56 \text{ m/s (prędkość rozchodzenia się fali w strunie)}}}$$

przy $\chi^2 = 8,574$



Co w skalach logarytmicznych (\log_{10}) daje prostą:



ad. b.

podstawiając do wzoru 3. wynik z punktu d dostajemy wartości λ dla kolejnych ν :

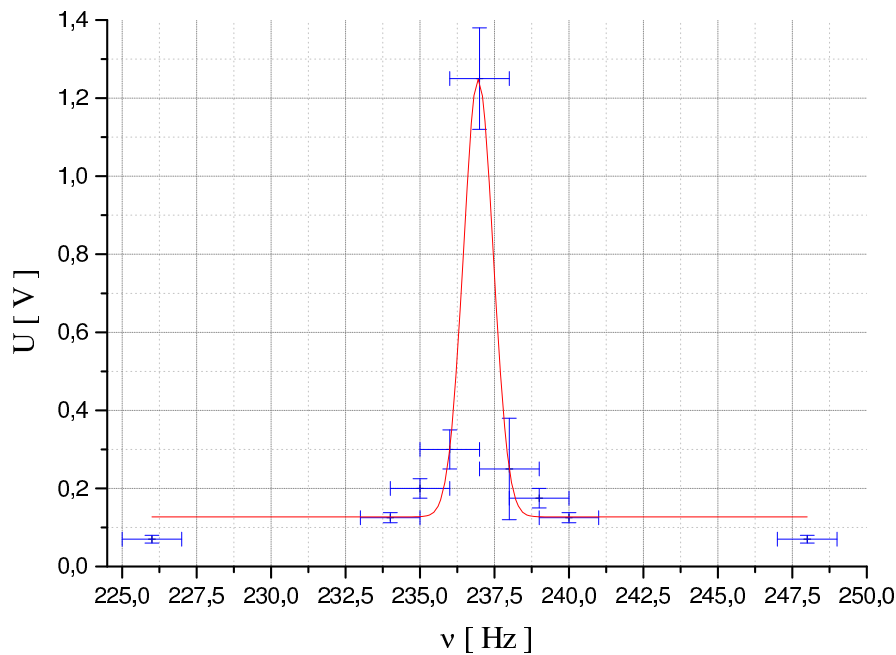
ν [Hz]	$\Delta\nu$ [Hz]	U [V]	ΔU [V]	λ [m]	$\Delta\lambda$ [m]
226	1	0,070	0,010	1,6944	0,0090
234	1	0,125	0,013	1,6365	0,0085
235	1	0,200	0,025	1,6295	0,0084
236	1	0,300	0,050	1,6226	0,0083
237	1	1,25	0,13	1,6158	0,0083
238	1	0,25	0,13	1,6090	0,0082
239	1	0,175	0,025	1,6022	0,0082
240	1	0,125	0,013	1,5956	0,0081
248	1	0,070	0,010	1,5441	0,0077

U – amplituda napięcia na oscyloskopie,
 ΔU – niepewność tej amplitudy.

Widać, że dla częstotści zbliżonej do pierwszej harmoniczej :
 zgodnie z teorią $l = \lambda / 2$ (długość struny bliska jest połowie długości fali stojącej
 wytworzonej przez siłę wymuszającą o częstotści podstawowej).
 Jednocześnie amplituda napięcia, wskazywana przez oscyloskop jest największa.

krzywa Gaussa dopasowana z $\chi^2 = 0,00281$

Maksimum $U = 1,254 \pm 0,022$ V, $\nu_0 = 236,958 \pm 0,036$ Hz



Wartość częstości podstawowej:
z punktu a.:

$$\nu_0 = \underline{\underline{237,140 \pm 0,039 \text{ Hz}}}$$

odczytana z wykresu:

$$\nu_0 = \underline{\underline{236,958 \pm 0,036 \text{ Hz}}}$$

czyli obie są zgodne na poziomie 3σ

Gęstość liniowa struny:

$$\rho = \underline{\underline{0,00010324 \pm 0,00000033 \text{ kg/m}}}$$

Tablicowa wartość gęstości stali (struna wykonana jest ze stali) wynosi 7800 kg/m^3 , średnica struny $0,260 \pm 0,005 \text{ mm}$, czyli

gęstość objętościowa $7780 \pm 300 \text{ kg/m}^3$, czyli świetna zgodność z wartością tablicową.

Podsumowując można powiedzieć, że doświadczenie potwierdziło słuszność związku pomiędzy częstością drgań podstawowych struny, jej długością i naprężeniem. Udało się przebadać częstości kolejnych drgań harmonicznnych i potwierdzić słuszność wzoru. Doświadczenie to pozwoliło również na wyznaczenie gęstości liniowej struny, prędkości rozchodzenia się w niej fal, oraz gęstości objętościowej materiału, z którego została wykonana.