

Kacper Kulczycki

Zadanie 3

Badanie rzutu ukośnego

Warszawa 2001

Wstęp

Celem doświadczenia było wyznaczenie torów ruchu kulek w ziemskim polu grawitacyjnym (rzut ukośny pod różnymi kątami), oraz znalezienie krzywej opisującej te tory.

Teoria

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_0)^2 \quad \text{wz.1.}$$

wprowadzając: $\vec{g} = (0, -g, 0)$, $\vec{v}_0 = (v_x, v_y, 0)$, $t_0 = 0$ dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} x(t) = v_x t = v_0 t \cos\alpha & \text{wz.2.} \\ y(t) = v_y t - \frac{1}{2}g t^2 = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}g t^2 & \text{wz.3.} \\ z(t) = 0 & \text{wz.4.} \end{cases}$$

eliminując czas otrzymujemy:

$$y = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \right) x^2 + (\operatorname{tg}\alpha)x \quad \text{wz.5.}$$

Z zasady zachowania energii:

$$E = mgh = E_k + E_p = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{5} = \frac{7mv_0^2}{10} \quad \text{wz.6.}$$

Czyli:

$$v_0 = \sqrt{\frac{10gh}{7}} \quad \text{wz.7.}$$

Po podstawieniu:

$$y = \left(-\frac{7}{20h \cos^2\alpha} \right) x^2 + (\operatorname{tg}\alpha)x \quad \text{wz.8.}$$

Gdzie:

\vec{r} - wektor położenia ciała w chwili czasu t ,

\vec{v}_0 - wektor prędkości (początkowej) ciała w czasie t_0 ,

\vec{g} - wektor przyspieszenia ziemskiego,

t_0 - czas, w którym zaczął się ruch,

t - czas,

g - wartość wektora przyspieszenia ziemskiego (9,81 m/s²),

x - wartość składowej x położenia w chwili t ,

y - wartość składowej y położenia w chwili t,
z - wartość składowej z położenia w chwili t,
 v_x – wartość składowej x prędkości początkowej,
 v_y – wartość składowej y prędkości początkowej,
 v_0 – wartość wektora prędkości początkowej,
 α - kąt, pod jakim ciało zostało wyrzucone,
E – energia ciała na wysokości h,
h – różnica wysokości końców spadkownicy,
 E_p – energia kinetyczna postępową kulki na niższym końcu spadkownicy,
 E_o – energia kinetyczna obrotowa kulki na niższym końcu spadkownicy,

Przebieg doświadczenia

Układ pomiarowy składał się ze spadkownicy o regulowanym kącie nachylenia dolnego końca, oraz ekranu umieszczonego na prowadnicy ustawionej pod kątem 45° do osi spadkownicy.

Pomiary zostały przeprowadzone dla trzech różnych kątów nachylenia spadkownicy: 0° , 10° , 20° . Punkty pomiarowe były zbierane co 3 cm, zaczynając od punktu oddalonego od końca spadkownicy o 3 cm.

Wyniki i wnioski

Dla kąta $0 \pm 2^\circ$ i wysokości $0,670 \pm 0,001$ m:

Po numerycznym dopasowaniu paraboli do punktów doświadczalnych (metodą najmniejszych kwadratów) dostałem:

$$\frac{7}{20h \cos^2 \alpha} = 1,269 \pm 0,071 \text{ 1/m}$$

$$\text{tg} \alpha = 0,013 \pm 0,016$$

$$\text{przy wartości: } \chi^2 = 0,00003$$

$$\text{czyli kąt } \alpha = \mathbf{0,74 \pm 0,90^\circ}$$

$$\text{oraz } \mathbf{h = 0,51 \pm 0,84 \text{ m}}$$

Dla kąta $10 \pm 2^\circ$ i wysokości $0,532 \pm 0,001$ m:

Dostałem po dopasowaniu:

$$\frac{7}{20h \cos^2 \alpha} = 1,675 \pm 0,088 \text{ 1/m}$$

$$\text{tg} \alpha = 0,127 \pm 0,019$$

przy wartości: $\chi^2 = 0,00004$

czyli $\alpha = 7,3 \pm 1,1^\circ$

$h = 0,7 \pm 2,2 \text{ m}$

Dla kąta $20 \pm 2^\circ$ i wysokości $0,375 \pm 0,001 \text{ m}$:

Dostałem:

$$\frac{7}{20h \cos^2 \alpha} = 3,64 \pm 0,20 \text{ 1/m}$$

$$\text{tg} \alpha = 0,216 \pm 0,034$$

przy wartości: $\chi^2 = 0,0001$

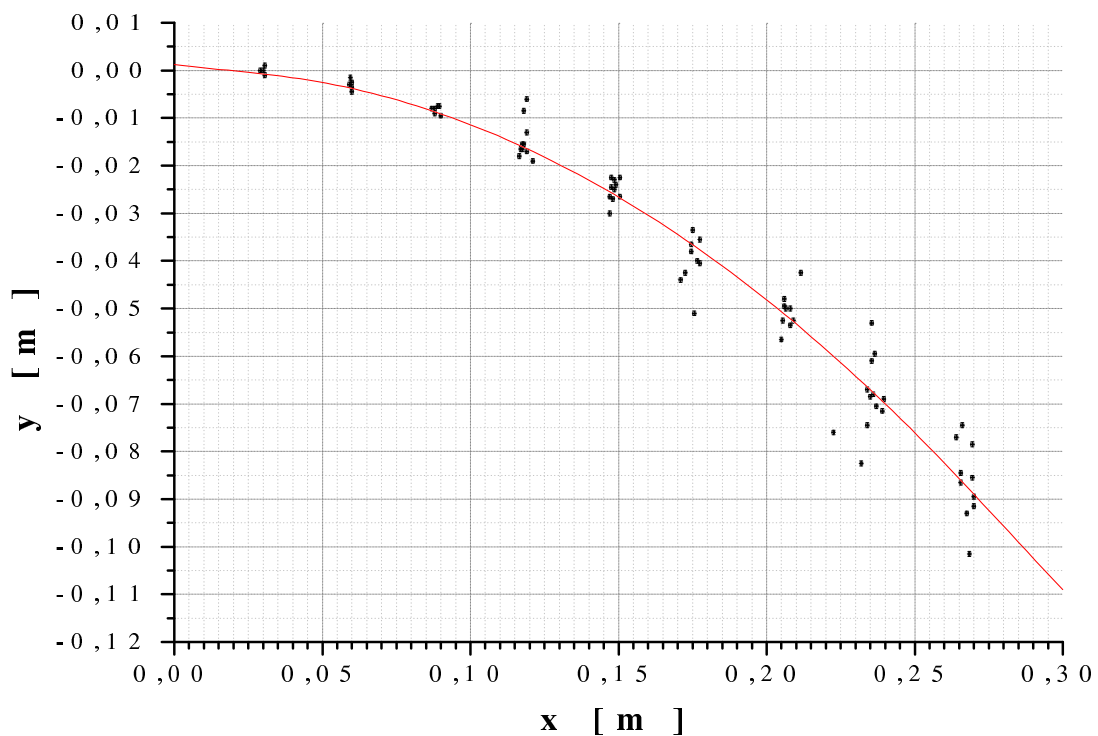
co dało $\alpha = 12,2 \pm 1,9^\circ$

oraz $h = 0,11 \pm 0,16 \text{ m}$

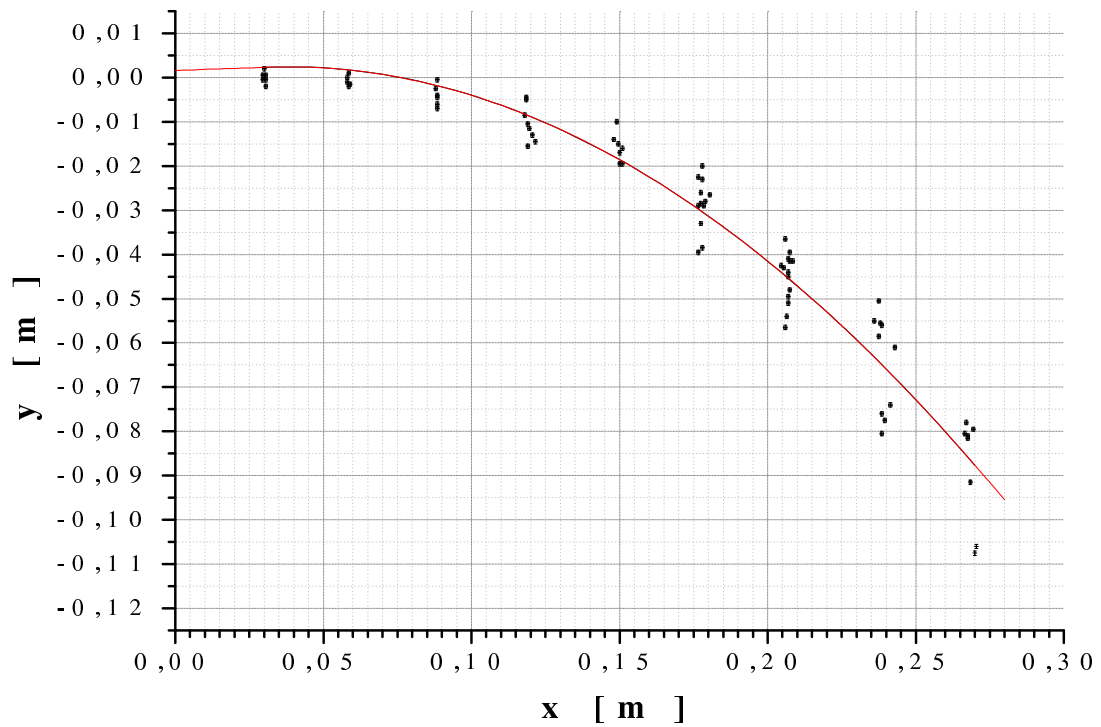
Widać że poszczególne wielkości są ze sobą zgodne na poziomie 3σ .

Teoria jest zgodna z doświadczeniem co pokazują wykresy torów kulek w kolejnych przypadkach:

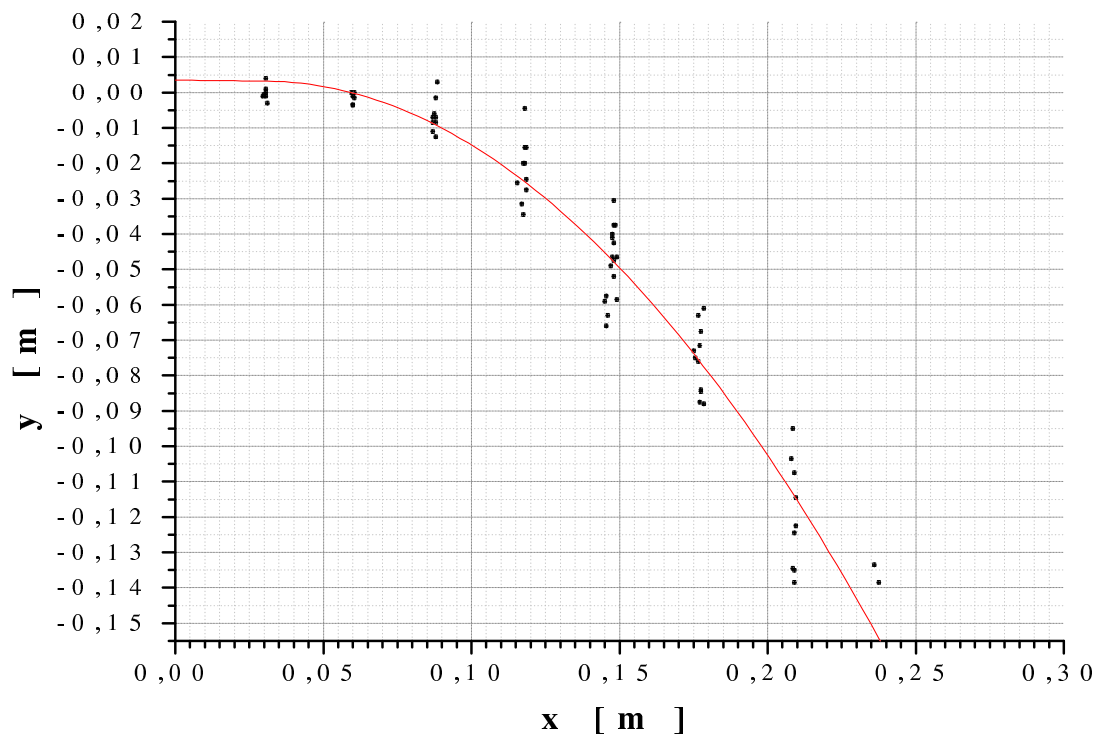
Dla 0°



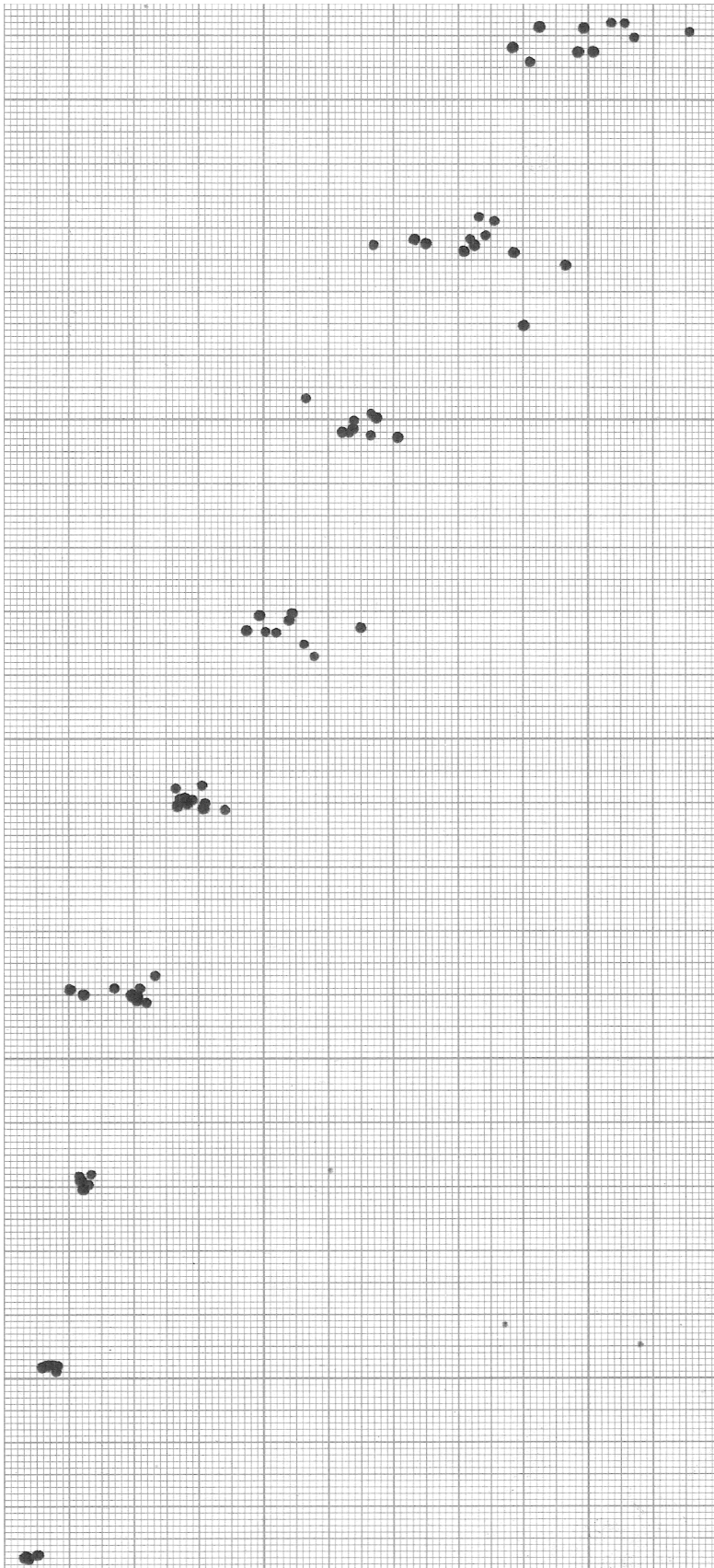
Dla 10°

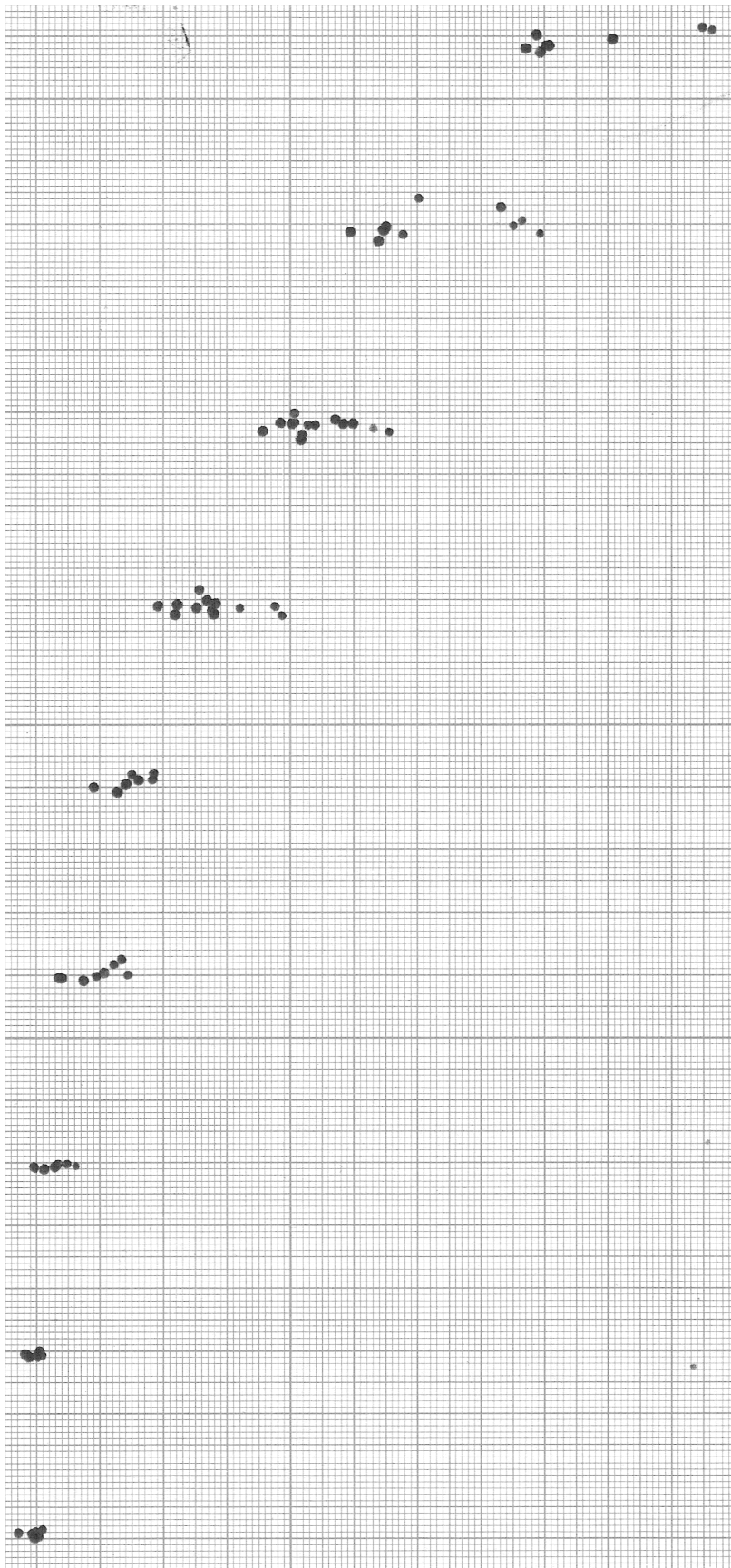


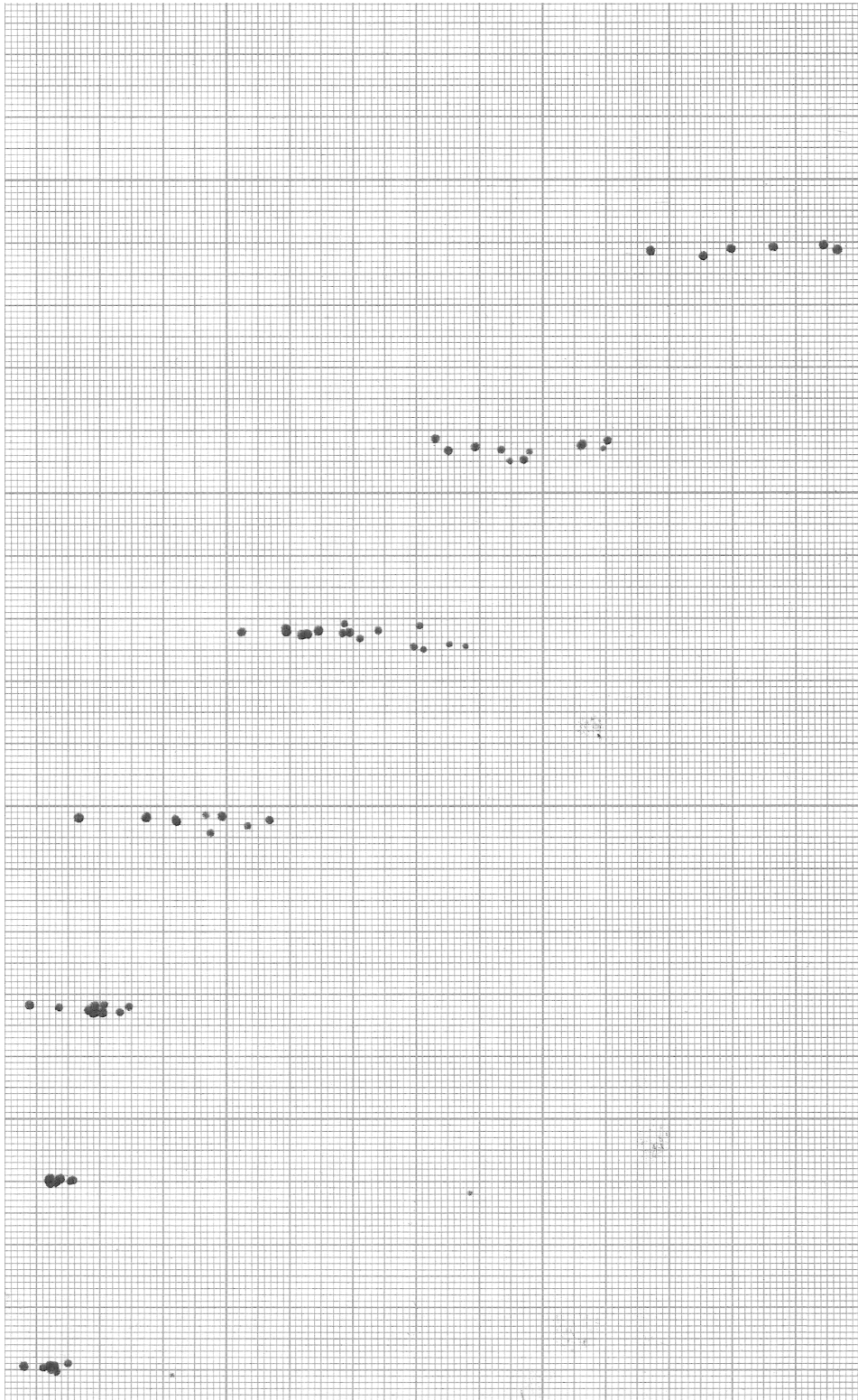
Dla 20°



Niedokładności położenia poszczególnych punktów zostały oszacowane na $\pm 0,5$ mm.
Po naniesieniu krzywych na papier milimetrowy wykresy wyglądają następująco:







• •
• •

Widać więc że teoria odpowiada rzeczywistym pomiarom, z niewielkim ograniczeniem – kąt nachylenia spadkownicy powinien być niewielki. Gdy jest on bliski zeru, kulka właściwie nie toczy się w żadnej chwili „pod górę”. W przeciwnym wypadku zaczyna ona zwalniać, co ogranicza dokładność wyznaczenia różnicy poziomów, które pokonała przed opuszczeniem spadkownicy.