Kacper Kulczycki

Zadanie 8

Badanie wahadeł sprzężonych

Warszawa 2001

Wstęp

Celem doświadczenia jest zbadanie zależności częstości drgań wahadeł sprzężonych (sympatycznych) w zależności od sposobu ich wzajemnego położenia, oraz wyznaczenie współczynnika sprężystości sprężyny.

Interesujące są cztery przypadki:

a. wychylenie obu wahadeł w tą samą stronę, o taki sam kąt (analogicznie do ruchu pojedynczego wahadła),
b. wychylenie obu wahadeł o taki sam kąt, ale w przeciwne strony,
c. wychylenie wahadeł o różne kąty (szczególny przypadek: jedno wahadło wychylone, a drugie wiszące pionowo – w układzie pojawiają się dudnienia),
d. jedno wahadło wychylone, drugie umocowane pionowo w statywie.

Teoria

Wahadła wychylone o niewielkie kąty ($\sin\alpha \approx \alpha$), $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Równania opisujące poszczególne przypadki drgań:

Ad. a.

$$\omega_1 = \frac{2\Pi}{T_1} \qquad \text{wz.1}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgr}{I}} \qquad \text{wz.2}$$

Ad. b.

$$\omega_2 = \frac{2\Pi}{T_2} \qquad \text{wz.3}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgr + 2ka^2}{I}} \qquad \text{wz.4}$$

Ad. c.

$$\Omega_1 = \frac{2\Pi}{T_1'} \qquad \text{wz.5}$$

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad \text{wz.6}$$

$$\Omega_2 = \frac{2\Pi}{T_2'} \qquad \text{wz.7}$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \qquad \text{wz.8}$$

Ad. d.

$$\omega_0 = \frac{2\Pi}{T_0} \qquad \text{wz.9}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr + ka^2}{I}} \qquad \text{wz.10}$$

oraz

$$T_1' = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} \qquad \text{wz.11}$$

$$T_2' = \frac{2T_1T_2}{T_1 - T_2} \qquad \text{wz.12}$$

teoretycznie, gdyby wahadła były wahadłami matematycznymi: $I = m r^2$ wz.13

$$k = \frac{g\,\Delta M}{\Delta x} \qquad \text{wz.14}$$

gdzie:
ω_i , Ω_i – odpowiednie częstości drgań (ω_1, ω_2 – częstości drgań własnych, Ω_2 – częstość dudnień),
T_i , T_i’ – odpowiednie okresy drgań,
m – masa wahadła,
r – odległość środka masy od punktu zawieszenia,
k – współczynnik sprężystości sprężyny
a – odległość punktu zaczepienia sprężyny od punktu zawieszenia,
I – moment bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez punkt zaczepienia,
ΔM – masa ciężarka rozciągająca sprężynę,
Δx – zmiana długości sprężyny powodowana przez zawieszony ciężarek,
g – przyspieszenie grawitacyjne.

Przebieg doświadczenia

Pierwszym zaobserwowanym szczegółem było nadmierne rozciągnięcie sprężyny. Nie było ono znaczne, ale sprężyna była znacznie słabiej napięta w porównaniu z innymi zestawami tak, że jej środek ciężkości znajdował się ok. 1,5 cm poniżej punktów zaczepienia sprężyny do prętów wahadeł. (Prawdopodobnie spowodowane to było, zawieszeniem na sprężynie, zbyt dużego ciężaru, przy wyznaczaniu współczynnika k przez poprzedni zespół.)
Druga ważna obserwacja to przesunięcie kresek oznaczających prawidłowe położenie nakrętek mocujących ciężarki wahadeł.
Po wyjęciu sprężyny sprawdziłem czy okresy drgań wahadeł są takie same. Najpierw wychyliłem obydwa wahadła o podobny (niewielki) kąt w tą samą stronę i obserwowałem czy w przeciągu 10 minut nastąpi widoczne przesunięcie w fazie drgań.
(Przed regulacją nakrętek było zauważalne, po regulacji nie dało się zaobserwować.)
Następnie zmierzyłem czas 10 okresów jednego i drugiego wahadła. (Oczywiście w całym doświadczeniu stoper stertowałem nie w momencie puszczenia wahadeł, ale gdy osiągały wyznaczony punkt start/stop, (maksymalne lub zerowe wychylenie) po przebyciu przynajmniej jednego okresu.
Różnica między nimi wynosiła 0,16 s, a więc była kwestią mojego refleksu (okresy drgań takie same w granicach błędu).
Jak wspomniałem we wstępie przypadek a. można rozpatrywać na zredukowany sposób. Nie jest to tylko uwaga teoretyczna – z praktycznego punktu widzenia, obserwacja ruchu pojedynczego wahadła nie stwarza problemu. Czego nie można powiedzieć o próbie wychylenia obydwu sprzężonych wahadeł o ten sam kąt, w tą samą stronę, i puszczenia ich w tym samym momencie.

Następne więc, pomiary dziesięciokrotności okresów drgań (T_1.) wykonywałem badając na przemian ruch lewego i prawego wahadła. Po trzecim pomiarze ponownie wystartowałem układ.
Następny pomiar – dziesięciokrotności okresu T_2, wykonywałem analogicznie (dla uzyskania wychylenia o jednakowy kąt związywałem wahadła nitką, którą przepalałem startując układ).
Po ósmym pomiarze ponownie wystartowałem układ.
Przy pomiarze T_1' i T_2' starałem się ustawić układ tak, aby przy starcie, jedno wahadło wisiało pionowo, a drugie było wychylone o pewien kąt (nie jest to konieczne – wystarczy, aby oba wahadła były wychylone o różne kąty)
Ze względu na specyfikę drgań układu „ c. ” (dudnienia) mierzyłem pięciokrotności okresów T_1' i T_2' (przy większej ilości okresów, moment gdy obserwowane wahadło „ zatrzymywało ” się wypadał podczas pomiaru).
Mierząc te okresy za punkty start/stop przyjąłem punkty maksymalnego dla T_1', a dla T_2' zerowego wychylenia. Czas między jednym, a drugim wychyleniem, w pierwszym przypadku był równy jednemu okresowi drgań z częstością Ω_1, a czas między pionowymi „ zatrzymaniami ” wahadła był połową okresu dudnień T_2'.
Po zebraniu całej serii pomiarów T_1' i pięciu pomiarów T_2' wystartowałem układ ponownie.
Badając przypadek „ d. ” umocowałem lewe wahadło w statywie i zmierzyłem czasy równe dziesięciokrotności T_0.
Pomiarów wszystkich czasów dokonywałem w seriach po dziesięć pomiarów. (Wyjątkiem był pomiar pięciokrotności T_1' – wykonałem łącznie 11 pomiarów, gdyż przy drugim spóźniłem zatrzymanie stopera, i musiałem go od razu odrzucić.
Po zmontowaniu układu do badania wydłużenia sprężyny pod wpływem zawieszonych ciężarków, zaznaczyłem punkt wyjściowy na skali milimetrowej. (Punkt ten, jak i następne znajdowałem, patrząc na skalę z takiej perspektywy, aby naprzeciwległe brzegi szalki pokryły się i wskazały szukaną pozycję).
Następnie dokładałem kolejne odważniki, uważając jednak, aby nie przeciążyć sprężyny - nie rozciągnąć jej (zniszczyłoby to jej dotychczasowe parametry). Wykonałem serię pięciu pomiarów.(Odważniki nie miały podanych błędów oznaczenia ich mas, uznałem więc je za wzorce – błąd zerowy.)
Masę wahadła odczytałem na ciężarkach. Odległość środka masy od punktu zawieszenia znalazłem dodając do maksymalnej długości na skali, na pręcie wahadła, odległość do punktu podparcia o ostrze, zmierzoną przy pomocy miarki. Odległość punktu zaczepienia sprężyny od punktu zawieszenia wahadła zmierzyłem, odczytując na skali położenie dolnego końca zaczepu i odejmując od niego połowę długości zaczepu zmierzoną przy pomocy miarki.

Wyniki i wnioski

$T_1 = 1,895 \pm 0,011$ s
$T_2 = 1,740 \pm 0,011$ s
$T_1' = 1,8040 \pm 0,0099$ s
$T_2' = 44,08 \pm 0,12$ s
$T_0 = 1,804 \pm 0,18$ s
$m = 3,00 \pm 0,04$ kg
$r = 0,82300 \pm 0,00071$ m
$a = 0,29250 \pm 0,00056$ m
$k = 30,11 \pm 0,71$ N/m (otrzymany metodą statyczną, ze wz.14.)

A więc odpowiednio ze wzorów:
1. **$\omega_1 = 3,315 \pm 0,020$ Hz**

3. **ω_2 = 3,612 ± 0,022 Hz**
5. Ω_1 = 3,483 ± 0,019 Hz
7. Ω_2 = 0,14254 ± 0,00039 Hz
9. **ω_0 = 3,482 ± 0,034 Hz**

13. I = 2,032 ± 0,027 kg × m^2
2. po przekształceniu i podstawieniu ω_1 ze wz.1:
I = 2,204 ± 0,032 kg × m^2
Test 3σ pozwala stwierdzić, że moment bezwładności wahadła użytego w tym doświadczeniu może być traktowany, z niezłym przybliżeniem, jak moment bezwładności wahadła matematycznego o masie m i długości r.

Po przekształceniu ze wz.4, podstawiając ω_2 ze wz.3 oraz I z przekształconego wz.2, dostajemy:
k = 26,5 ± 3,3 N/m.
Analogicznie ze wz.10:
k = 29,3 ± 6,7 N/m.
W przypadku współczynnika sprężystości test 3σ wykazuje poprawność wszystkich trzech wartości k, wynikiem będzie więc ich średnia ważona.
Ostatecznie, więc:
k = 29,94 ± 0,69 N/m.
Po podstawieniu wartości ω_1 i ω_2 do wz.6 i wz.8 otrzymujemy alternatywne wartości Ω_1 = 3.464 ± 0,015 Hz i Ω_2 = 0,148 ± 0,015 Hz. I znów test 3σ potwierdza zgodność wyników, biorąc więc średnie ważone:
Ω_1 = 3,471 ± 0,012 Hz i
Ω_2 = 0,14254 ± 0,00039 Hz.
(Widać, więc że o ile w przypadku Ω_1 dostajemy średnią, to w przypadku Ω_2 wkład wartości zmierzonej „ bezpośrednio ” był na tyle duży, że skompensował wkład wartości obliczonej „ pośrednio ”.)
Na końcu można sprawdzić czy zachodzą równania wz.11 i wz.12.
Po podstawieniu wartości T_1 i T_2 dostajemy:
T_1’ = 1,814 ± 0,015 s,
T_2’ = 42,3 ± 8,0 s.
Znów test 3σ potwierdza zgodność wyników, chociaż z praktycznego punktu widzenia, wartości uzyskane ze wz.11 i 12 są obarczone bardzo dużymi błędami.
Oczywiście w obliczania błędów wielkości złożonych posługiwałem się wzorami na propagację małych błędów, a jako wag w średnich ważonych, używałem kwadratów odwrotności błędów poszczególnych elementów średniej.