

mgr M. Ćwiok

Kacper Kulczycki

Układ oscylujący

Warszawa 2001

Przedmowa

Na początku chcę usprawiedliwić tak późne oddanie pracy. Spowodowane to było utratą większości danych, z powodu błędu mojego domowego komputera. Jednak to nie wszystko bo od samego początku wykonywania ćwiczenia prześladował mnie pech. Dużą część czasu, poświęconego wykonaniu zadania, zajęło lokalizowanie usterki w układzie. Powodowało to złe wskazania oscyloskopu. Powodem tego był uszkodzony trójnik BNC. Ćwiczenie to było więc niezwykle czasochłonne podczas wykonywania i opisu.

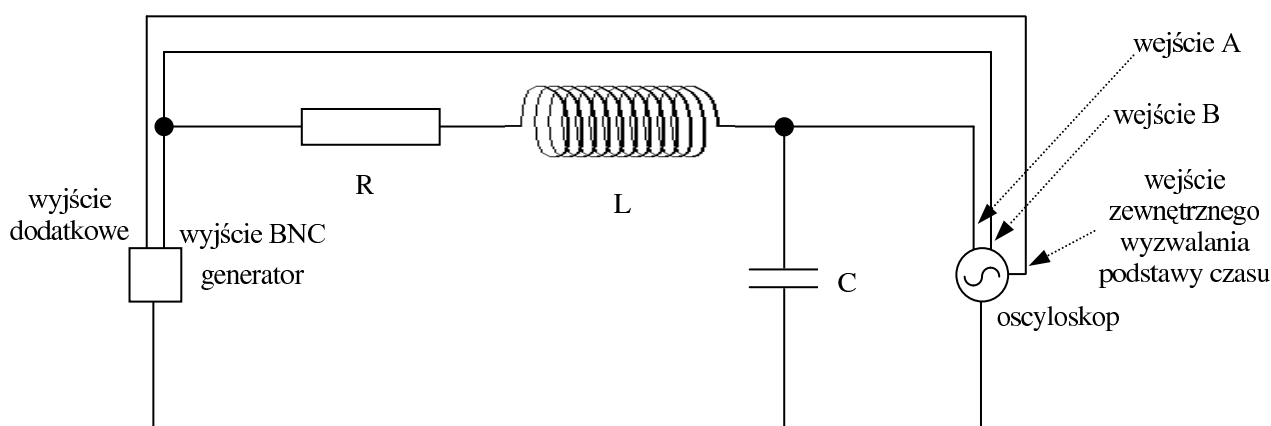
Licząc na dobrą wolę oceniającego, mam nadzieję że usprawiedliwienie spóźnienia jest wystarczające.

Wstęp

Celem ćwiczenia jest znalezienie indukcyjności cewki przy pomocy obwodu RLC oraz zaznajomienie się z obsługą oscyloskopu i generatora.

Teoria

Do pomiarów wykorzystuje się układ pokazany na rys.1.



rys.1

Zakładamy że napięcie w funkcji czasu w tym układzie opisuje następująca zależność:

$$U = U_0 e^{-at} \cos(\omega t) \quad \text{wz.1}$$

Jeżeli zajmiemy się tylko maksimami i minimami to moduły ich wartości ułożą się na prostej:

$$\log|U_{\max, \min}| = -at + \log|U_0| \quad \text{wz.2}$$

Z rozwiązania równania ruchu ładunków w układzie RLC dostajemy zależność:

$$a = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \quad \text{wz.3}$$

Tu „a” oznacza wartość bezwzględną współczynnika a; czyli ostatecznie wyznaczamy indukcyjność z równania:

$$L = \frac{aCR + 1}{a^2 C} \quad \text{wz.4}$$

Natomiast między najbliższymi sobie ekstremami i zerowymi wartościami napięcia różnica czasów $t_{1/4}$ równa jest jednej czwartej okresu drgań napięcia na obwodzie. Czyli:

$$\omega = \frac{\pi}{2t_{1/4}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{wz.5}$$

po podstawieniu $t_{1/4}$ do poprzedniego równania i rozwiązaniu ze względu na indukcyjność:

$$L = \frac{2(t_{1/4})^2 \pm t_{1/4} \sqrt{4(t_{1/4})^2 - R^2 C^2 \pi^2}}{\pi^2 C} \quad \text{wz.6}$$

Metodę wyznaczania L ze stałej tłumienia będę nazywał metodą 1, a metodę wyznaczania częstotliwości metodą 2.

Oczywiście we wszystkich wzorach R oznacza opór układu, L jego indukcyjność, a C pojemność.

Dla uproszczenia jednak zakładam że indukcyjność układu jest równa indukcyjności cewki, pojemność układu to pojemność kondensatora, natomiast opór układu jest sumą oporu opornika i impedancji generatora.

Rachunek błęd:

Współczynnik a i $\log|U_0|$ i odpowiednie błędy wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów.

Błąd wartości L wyznacza się ze wzorów na propagację małych błędów, czyli:

dla metody 1:

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\Delta C}{a^2 C^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2 + aCR)\Delta a}{a^2 R}\right)^2} \quad \text{wz.7}$$

a dla metody 2 (dla zależności od $t_{1/4}$):

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\left(2 \pm \frac{4t_{1/4}}{\sqrt{4(t_{1/4})^2 - R^2 C^2 \pi^2}}\right) (t_{1/4})^2 \Delta C}{\pi^2 C^2}\right)^2 + \left(\frac{RCt_{1/4} \Delta R}{\sqrt{4(t_{1/4})^2 - R^2 C^2 \pi^2}}\right)^2 + \left(\frac{4t_{1/4} \pm \frac{8(t_{1/4})^2 - R^2 C^2 \pi^2}{\sqrt{4(t_{1/4})^2 - R^2 C^2 \pi^2}} \Delta t_{1/4}}{\pi^2 C}\right)^2} \quad \text{wz.8}$$

Natomiast dla częstotliwości:

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - R^2 C^2 \omega^2}}\right) \Delta C}{2\omega^2 C^2}\right)^2 + \left(\frac{RC \Delta R}{2\sqrt{1 - R^2 C^2 \omega^2}}\right)^2 + \left(\frac{\left(1 \pm \frac{2 - R^2 C^2 \omega^2}{2\sqrt{1 - R^2 C^2 \omega^2}}\right) \Delta \omega}{\omega^3 C}\right)^2} \quad \text{wz.9}$$

Pomiar

Do dyspozycji miałem dwa oporniki o oporach $R_1 = 0,0511 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 0,5175 \text{ k}\Omega$, kondensator o pojemności $C = 1 \text{ nF}$.

Teoretycznie dla miernika którym się posługiwałem dokładność pomiaru oporów, wynosi 0,2% wartości wskazywanej. Jednak w przypadku R_1 i R_2 całkiem sensowne jest założenie

że dokładność ta wynosi 0,0001 kΩ. Dla R₁ dostajemy rzeczywiście 0,2% wskazania, jednak dla R₂ stanowi to zaledwie 0,02% tej wartości.

Niepewność wartości pojemności C = 1 nF, oceniłem zgodnie z danymi producenta na 5%, co stanowi 0,05 nF.

Impedancja generatora była dana i wynosiła 0,0500 kΩ, a jej błąd oszacowałem na 5% tej wartości, czyli 0,0025 kΩ

Jako źródła napięcia używałem generatora, do zmierzenia R_{1,2} użyłem omomierza, a pomiarów oscylacji napięcia wyjściowego U_{wy} dokonałem przy użyciu oscyloskopu. Układ RLC zmontowałem na uniwersalnej płycie montażowej z gotowymi gniazdami BNC.

Pomiary dla oporu R₁ przeprowadziłem w dwóch seriach na zakresach oscyloskopu (5μs/cm / 1V/cm) i (2μs/cm / 2V/cm), a dla oporu R₂ w trzech seriach (5μs/cm / 1V/cm), (1μs/cm / 2V/cm) i (2μs/cm / 1V/cm). Ponieważ najmniejsza podziałka siatki na ekranie oscyloskopu miała długość 0,2 cm, oraz średnica plamki wynosiła ok. 0,2 cm, można było ocenić położenie badanego punktu z dokładnością 0,1 cm. A tym samym błąd pomiaru wynosił 0,1 jednostki przypadającej na centymetr skali. Podstawę czasu i impuls kwadratowej zmiany napięcia wyzwaliałem z częstotliwością 1 kHz.

Wyniki i ich dyskusja

Opory układu wynosiły odpowiednio:

dla układu z opornikiem R₁: **R = 0,1011 ± 0,0025 kΩ,**

dla R₂: **R = 0,5675 ± 0,0025 kΩ.**

(Oczywiście do obliczenia błędów posłużyłem się wzorem na propagację małych błędów).

Zebrane punkty pomiarowe:

R ₁			
U _{max}	ΔU	t _{max}	Δt
4,320	0,089	0,00000000	0,00000019
3,000	0,089	0,00000641	0,00000019
2,000	0,089	0,00001310	0,00000019
1,280	0,089	0,00001934	0,00000019
0,9	0,1	0,0000260	0,0000005
0,6	0,1	0,0000325	0,0000005
0,3	0,1	0,0000390	0,0000005
0,2	0,1	0,0000460	0,0000005
U _{min}	ΔU	t _{min}	Δt
-4,200	0,089	0,00000293	0,00000019
-2,200	0,089	0,00000976	0,00000019
-1,400	0,089	0,00001659	0,00000019
-0,9	0,1	0,0000230	0,0000005
-0,6	0,1	0,0000295	0,0000005
-0,4	0,1	0,0000365	0,0000005
-0,2	0,1	0,0000425	0,0000005
-0,1	0,1	0,0000490	0,0000005
U _{w0}	ΔU	T _{w0}	Δt
0,000	0,089	0,00000152	0,00000019
0,000	0,089	0,00000493	0,00000019
0,000	0,089	0,00000817	0,00000019
0,000	0,089	0,00001152	0,00000019
0,000	0,089	0,00001493	0,00000019
0,000	0,089	0,00001793	0,00000019
0,0	0,1	0,0000210	0,0000005
0,0	0,1	0,0000245	0,0000005

0,0	0,1	0,0000275	0,0000005
0,0	0,1	0,0000305	0,0000005
0,0	0,1	0,0000345	0,0000005
0,0	0,1	0,0000375	0,0000005
0,0	0,1	0,0000410	0,0000005
0,0	0,1	0,0000445	0,0000005
0,0	0,1	0,0000475	0,0000005

R ₂			
U _{max}	ΔU	t _{max}	Δt
4,422	0,067	0,000000000	0,000000088
0,600	0,067	0,000006752	0,000000088
0,150	0,071	0,00001383	0,00000019
U _{min}	ΔU	t _{min}	Δt
-1,311	0,067	0,000003364	0,000000088
-0,100	0,071	0,00001034	0,00000019
U _{w0}	ΔU	t _{w0}	Δt
0,000	0,067	0,000002000	0,000000088
0,000	0,067	0,000005349	0,000000088
0,000	0,071	0,00000890	0,00000019
0,000	0,071	0,00001200	0,00000019

W tabelach wartości napięć i ich błędów pomiaru zostały podane w woltach, a czasów w sekundach.

Dla wartości zmierzonych w kilku seriach skorzystałem ze średniej ważonej (za wagi przyjąłem standardowo odwrotności kwadratów błędów pomiaru danej wartości wchodzącej do średniej), wartości błędów wyznaczyłem z odwrotności pierwiastka sumy wag wartości składających się na daną wielkość.

Wartości współczynników a, U_0 , oraz ω wyznaczone pierwszą metodą:

Do ich obliczenia posłużyłem się numeryczną metodą najmniejszych kwadratów dla funkcji nieliniowych, przy użyciu programu STATISTICA[®] (niestety wersja programu 5,5 nie pozwala na w pełni prawidłowe dopasowanie krzywych – nie ma możliwości związania wartości zmierzonych z ich błędami pomiaru, jedyna opcja zbliżona do takiej pozwala na wykluczenie wartości o dużych błędach).

Ponieważ różnice błędów pomiaru wartości napięć były bardzo niewielkie postanowiłem brać pod uwagę wszystkie punkty pomiarowe. Przeprowadziłem natomiast dwie analizy, dla funkcji wyrażonej wzorem wz.2 (ω wyznaczyłem po podstawieniu do wz.1 uzyskanych wartości) oraz dla wz.1.

Dla R₁; dla wz.2: **$a = 68300 \pm 3600$ Hz,**

$$U_0 = 4,64 \pm 0,15 \text{ V,}$$

$$\omega = 962300 \pm 2900 \text{ Hz.}$$

dla wz.1: **$a = 67100 \pm 2800$ Hz,**

$$U_0 = 4,59 \pm 0,12 \text{ V,}$$

$$\omega = 962300 \pm 2800 \text{ Hz.}$$

Dla R₂; dla wz.2: **$a = 334000 \pm 32000$ Hz,**

$$U_0 = 4,40 \pm 0,17 \text{ V,}$$

$$\omega = 842000 \pm 24000 \text{ Hz.}$$

dla wz.1: **$a = 338000 \pm 23000$ Hz,**

$$U_0 = 4,41 \pm 0,12 \text{ V,}$$

$$\omega = 842000 \pm 21000 \text{ Hz.}$$

Widać więc że bezpośrednia aproksymacja zmniejsza nieco niepewności poszczególnych czynników.

Korzystając ze wzoru 5 (przechodząc do metody 2) obliczyłem zależność L od ω ,

dla R₁; dla wz.2: $L_1 = 0,00107 \pm 0,00011 \text{ H}$,

$$L_2 = 0,00000511 \pm 0,00000029 \text{ H,}$$

dla wz.1: $L_1 = 0,00107 \pm 0,00011 \text{ H}$,

$$L_2 = 0,00000511 \pm 0,00000029 \text{ H,}$$

dla R₂; dla wz.2: $L_1 = 0,00125 \pm 0,00011 \text{ H}$,

$$L_2 = 0,000161 \pm 0,000080 \text{ H,}$$

dla wz.1: $L_1 = 0,00125 \pm 0,00011 \text{ H}$,

$$L_2 = 0,000161 \pm 0,000080 \text{ H,}$$

(błędy ze wzoru 9 – tu już metoda kolejnych przybliżeń nie ma znaczenia)

Można sądzić że indukcyjność układu (cewki) zbliżona jest do wartości L – pierwszych.

Natomiast indukcyjności wyznaczane ze stałej a miały wartości całkowicie odbiegające od L₁

Dla R₁ wynosiły około 0,0000000000021 H, a dla R₂ około 0,01 H, (Całkowicie je odrzuciłem).

Wyniki metody 2

Czasy $t_{1/4}$ dla układów wynosiły:

dla R₁: $t_{1/4} = 0,000001618 \pm 0,000000069 \text{ s}$,

dla R₂: $t_{1/4} = 0,000001715 \pm 0,000000055 \text{ s}$.

Do obliczenia błędów poszczególnych wartości $t_{1/4}$ posłużyłem się wzorem na propagację małych błędów. Wartość średnią $t_{1/4}$ obliczyłem ze średniej ważonej (wagi – odwrotności błędów), a błąd $\Delta t_{1/4}$ z odwrotności pierwiastka sumy wag.

Stąd łatwo wyznaczyć z podanego wcześniej wzoru częstości:

dla R₁: $\omega = 971000 \pm 41000 \text{ Hz}$,

dla R₂: $\omega = 916000 \pm 30000 \text{ Hz}$.

(błędy – z propagacji małych błędów)

Natomiast L:

dla R₁: $L_1 = 0,001059 \pm 0,000090 \text{ H}$,

$$L_2 = 0,0000026 \pm 0,0000017 \text{ H.}$$

dla R₂: $L_1 = 0,001106 \pm 0,000078 \text{ H}$,

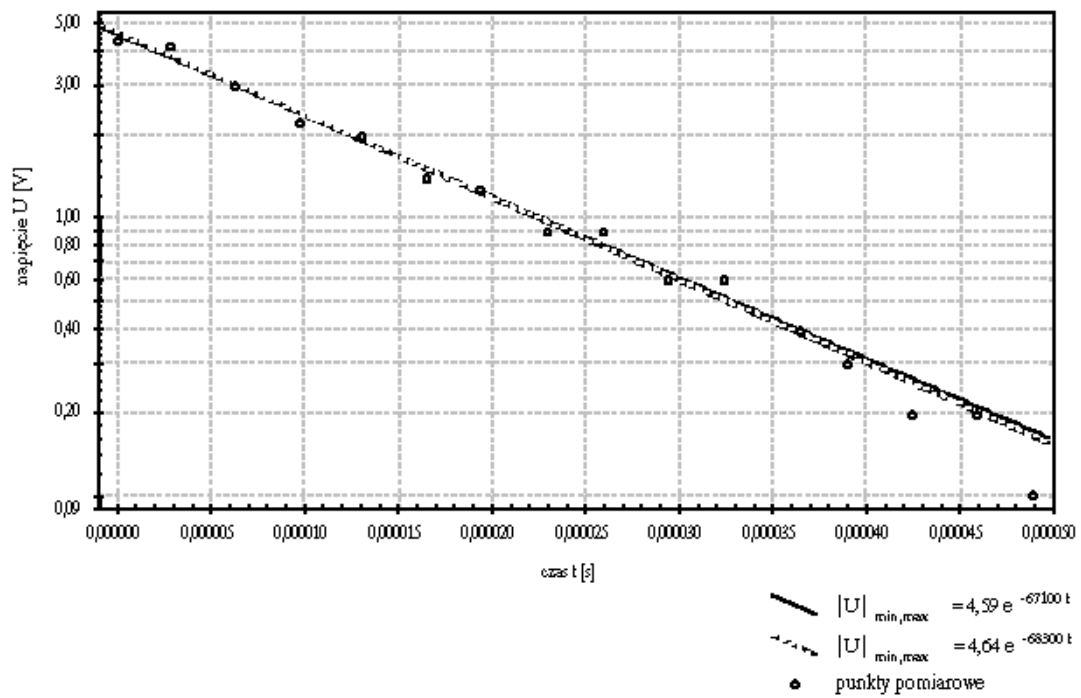
$$L_2 = 0,00008684 \pm 0,00000096 \text{ H.}$$

Widać więc że prawdziwa wartość indukcyjności zbliżona jest do wartości L₁ w obu metodach.

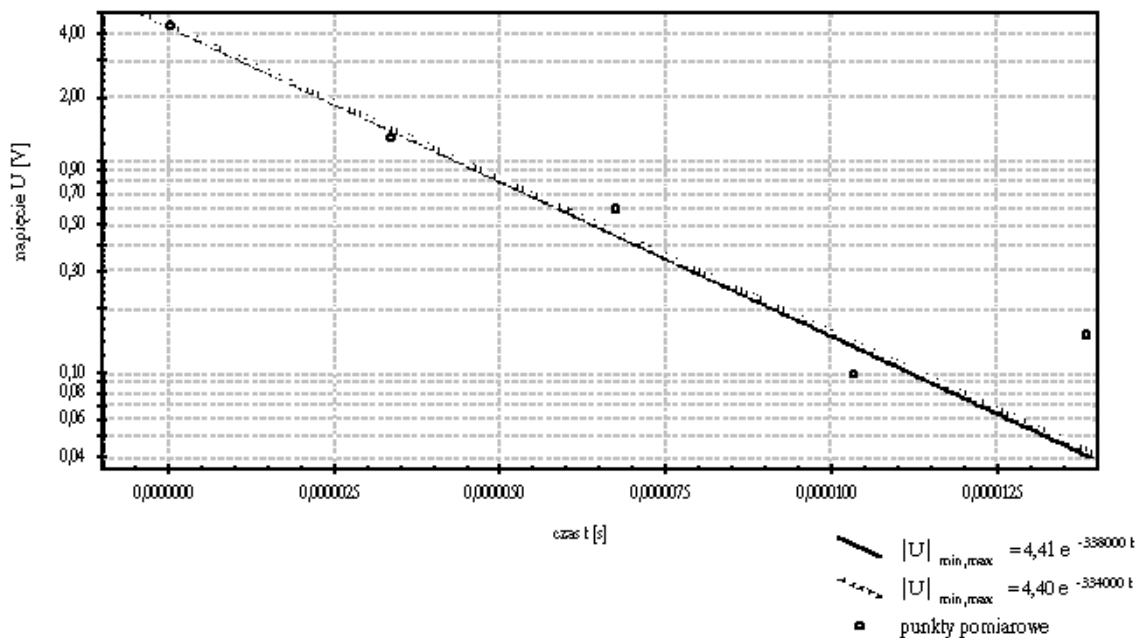
Czyli ze średniej ważonej (wagi jak poprzednio):

$$\underline{L = 0,001122 \pm 0,000040 \text{ H.}}$$

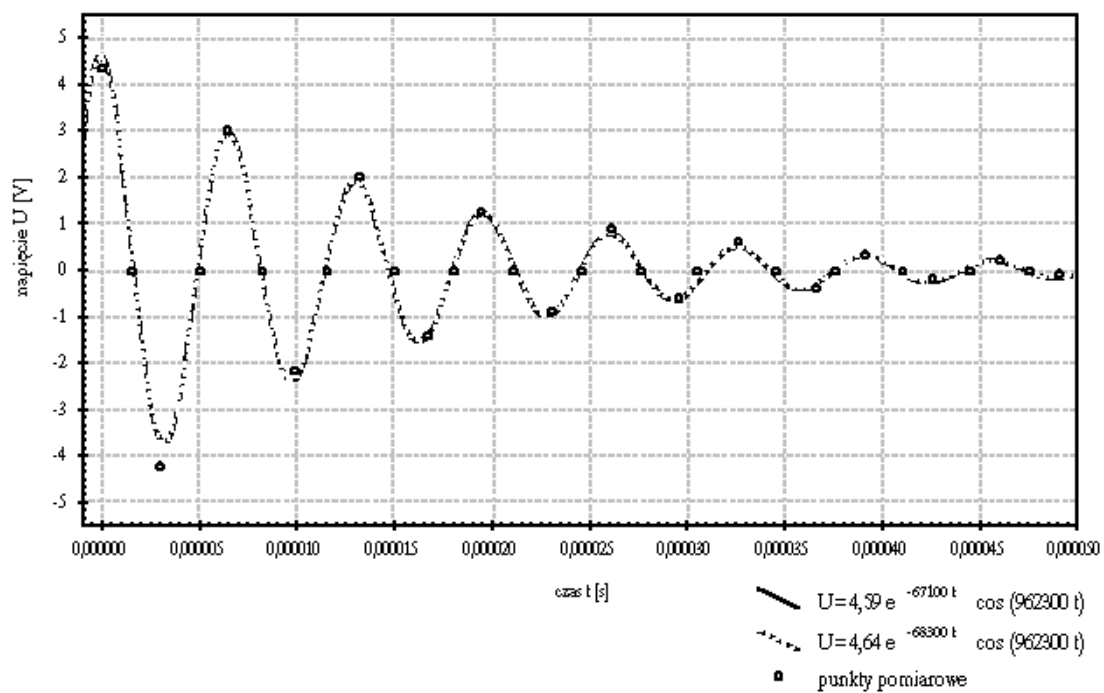
Ostatecznie można przedstawić wykresy przybliżanych krzywych i prostych.



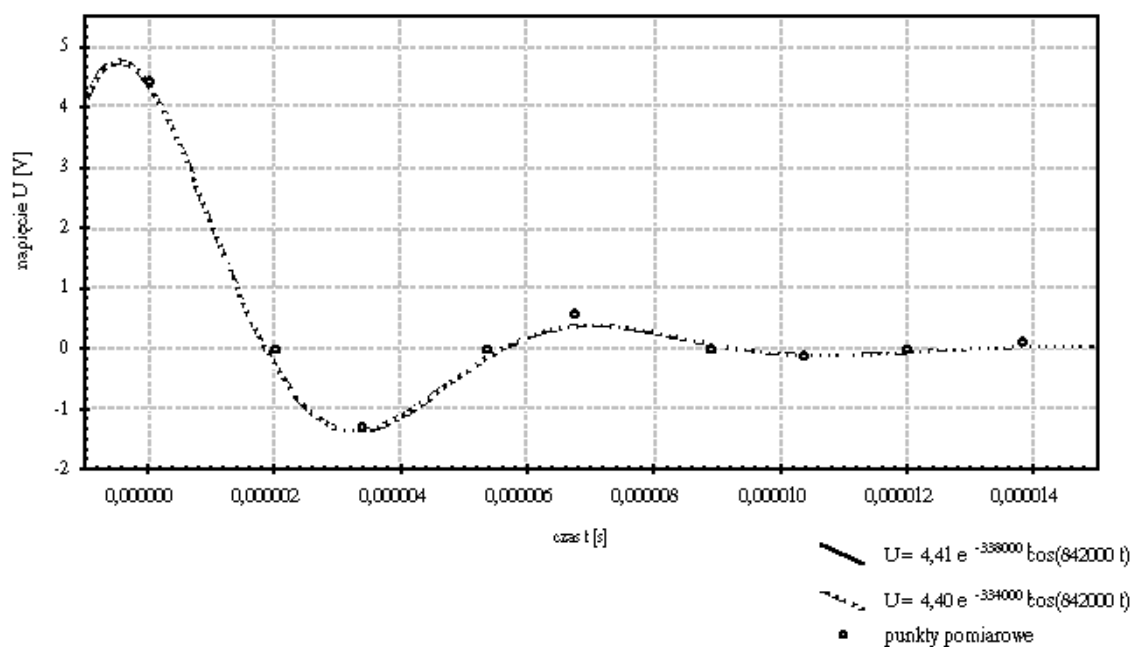
wyk.1 Aproksymacja zależności wz.2 (dla oporu R_1) dla współczynników wyznaczonych dwoma metodami.



wyk.2 Aproksymacja zależności wz.2 (dla oporu R_2) dla współczynników wyznaczonych dwoma metodami



wyk.3 Aproksymacja zależności wz.1 (dla oporu R_1) dla współczynników wyznaczonych dwoma metodami.



wyk.4 Aproksymacja zależności wz.1 (dla oporu R_2) dla współczynników wyznaczonych dwoma metodami.

Przy pomocy testu χ^2 można sprawdzić dokładność przybliżeń zależności $U(t)$.

Dla R_1 , dla zależności wyznaczonej z wz.2: $\chi^2 = 1$,

dla wz.1: $\chi^2 = 1$,

dla R_2 , dla wz.2: $\chi^2 = 0,99998$,

dla wz.1: $\chi^2 = 0,99995$.

Czyli każda z funkcji odpowiada prawdziwej zależności z ok. 50% prawdopodobieństwem.

Wnioski

Indukcyjność układu udało się wyznaczyć z dość dobrą dokładnością – niepewność tego pomiaru wyniosła ok. 3,6% wartości zmierzonej. Jednak ruch ładunków w tym konkretnym obwodzie nie w pełni odpowiadał przewidywaniom. Potwierdzają to wartości L wyznaczone ze stałej tłumienia, oraz test χ^2 dla otrzymanych zależności napięcia od czasu. Prawdopodobną przyczyną tego były zaniedbane czynniki związane z impedancjami przewodów, niedokładnością wyzwalania i bezwładnością oscyloskopu, itd. – ogólnie z niedoskonałością układu.

Oczywiście widać też, że dokładność pomiarów zależy od ilości prób.

Ważne jest również to żeby robić podczas pracy z komputerem kopie zapasowe opracowywanych plików (wbrew pozorom skraca to czas pracy).